

**FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA**  
**Department: Energetika i procesna tehnika**  
**Predmet: MERENJE I REGULISANJE**

**Poglavlje #3 i #4**

# **OPŠTE OSOBINE MERNIH UREĐAJA**

---

**Predmetni nastavnik:**

dr Miroslav Kljajić, Vanr. prof.

Prostorija 3, Blok F, SP  
[kljajicm@uns.ac.rs](mailto:kljajicm@uns.ac.rs)

**Asistent:**

Vladimir Munćan, MSc

Prostorija 9, Blok F, SP  
[vladimirmuncan@uns.ac.rs](mailto:vladimirmuncan@uns.ac.rs)

# OPŠTE OSOBINE MERNIH UREĐAJA

---

Kada je potrebno odabrati neki merni uređaj za zadata merenja ili kada treba konstruisati uređaj za neka posebna merenja, neophodno je razmotriti i uzeti u obzir sledeće:

- ▶ Priroda veličine koja se meri i njene specifičnosti,
- ▶ **Osnovne merne karakteristike uređaja i**
- ▶ Funkcionisanje uređaja u pretpostavljenim radnim uslovima (uzimajući u obzir potencijalne smetnje i poremećaje, njihovu varijaciju i dinamiku pojave).

# OPŠTE OSOBINE MERNIH UREĐAJA

---

Obzirom na merne karakteristike uređaja, postoji podela na:

**Statičke i**

**Dinamičke** karakteristika mernih uređaja

- Neke primene podrazumevaju konstantne ili malo i sporo promenljive merene veličine. U takvim uslovima dovoljno je poznavati statičke karakteristike uređaja bez detaljnijeg poznavanja njegovih dinamičkih karakteristika.
- Ukoliko se merena veličina menja brzo i u velikoj meri, neophodno je osim statičkih karakteristika, poznavati i njegove dinamičke karakteristike.

# **STATIČKE KARAKTERISTIKA MERNIH UREĐAJA - greške merenja -**

# STATIČKE KARAKTERISTIKA MERNIH UREĐAJA: **GREŠKE MERENJA**

---

## DEFINICIJA

- Pod istinitom ili tačnom vrednošću smatramo onu vrednost koja je dobijena merenjem po standardnim i široko prihvaćenim metodama propisanim od poznatih institucija i eksperata.  
*Pod ovakvim okolnostima rezultat merenja treba posmatrati kao interval u kome se tačna vrednost nalazi.*
- Odstupanja pojedinačnog rezultata merenja od pomenute tačne vrednosti nazivamo **greškama merenja**.
- ▶ Uzroke ovih odstupanja često ne možemo ni ustanoviti niti predvideti niti odrediti kolika će ona biti pri sledećim merenjima.

# GREŠKE MERENJA

---

- **Radni uslovi** pod kojima se vrši merenje mogu biti složeni i da se neprekidno menjaju, zbog delovanja mnogobrojnih faktora. Najčešće, delovanje ovih faktora nije moguće kontrolisati.
- Iz tog razloga se prilikom svakog merenja neizbežno čini veća ili manja greška. Čak i kad se preduzmu sve raspoložive mere, ipak ostaju greške koje se nikako ne mogu izbeći.
- Prema tome, **apsolutno tačno merenje nije moguće.**
  - ▶ Ono što jeste moguće je određivanje približno tačnog rezultata uz definisanje dve granične vrednosti između kojih se sigurno nalazi apsolutno tačan rezultat.
  - ▶ U cilju dobijanja što pouzdanijih i tačnijih mernih rezultata, **neophodno je poznavati greške i njihove uzroke**

# GREŠKE MERENJA

## Način izražavanja

---

**Apsolutnom greškom** merenja nazivamo odstupanje dobijenog rezultata od tačne (istinite) vrednosti:

$$\Delta x_i = x_i - X$$

gde je:  $x_i$  - Rezultat pojedinačnog merenja

$X$  - Tačna (istinita) vrednost

$\Delta x_i$  - Apsolutna greška

**Relativna greška** je:

$$\delta_i = \frac{x_i - X}{X}$$

► Apsolutna greška se meri u istim jedinicama kao i veličina koja se meri, dok je relativna greška neimenovan broj (može biti izražena i u procentima).

# GREŠKE MERENJA

---

Po svojim osobinama i po svom uticaju na rezultate merenja greške delimo na:

- **Grube**
- **Sistematske**
- **Slučajne**

► **Grube greške** odnose se na propuste u merenju nastale:

1. Nepažnjom posmatrača,
2. Neispravnošću mernog uređaja,
3. Lošom organizacijom merenja,
4. Neuzimanjem u obzir uticaja smetnji i promenljivih ulaza.

***One kao takve ne zaslužuju veću pažnju i dobrom pripremom i organizacijom samog merenja, mogu lako da se otklone.***



# GREŠKE MERENJA

---

► **Sistematske greške** su takve greške merenja koje ulaze u ukupnu grešku merenja po nekom zakonu, u zavisnosti od uticaja koji ju je prouzrokovao.

Sistematske greške se dele na stalne i jednostrano važeće.

- 1. Stalne sistematske greške** su one koje u toku merenja zadržavaju konstantnu veličinu i znak. Ove greške mogu da se odstrane iz rezultata merenja prethodnim određivanjem veličine te greške i uvođenjem popravke, po veličini jednake sistematskoj grešci, ali suprotnog znaka.
- 2. Jednostrano važeće greške** su složenije vrste sistematskih grešaka, koje pod određenim uslovima zadržavaju znak, ali menjaju svoju veličinu u zavisnosti od promene ulaza, koji uzrokuje ovu grešku. Mogu da se otklone uvođenjem popravke, koja je određena ili izračunata poznavajući zakon njenog delovanja i merenjem ulazne veličine, koja do te greške dovodi.

# GREŠKE MERENJA

---

► **Slučajne greške** su rezultat manjeg ili većeg broja različitih ulaznih veličina (smetnji i promenljivih ulaza), koji uslovljavaju tačnost merenja i čiji se intenzitet i smer dejstva nalaze u procesu stalne promene.

Ove promene se odvijaju po složenim zakonima pa ih je praktično nemoguće pojedinačno kontrolisati ili predvideti.



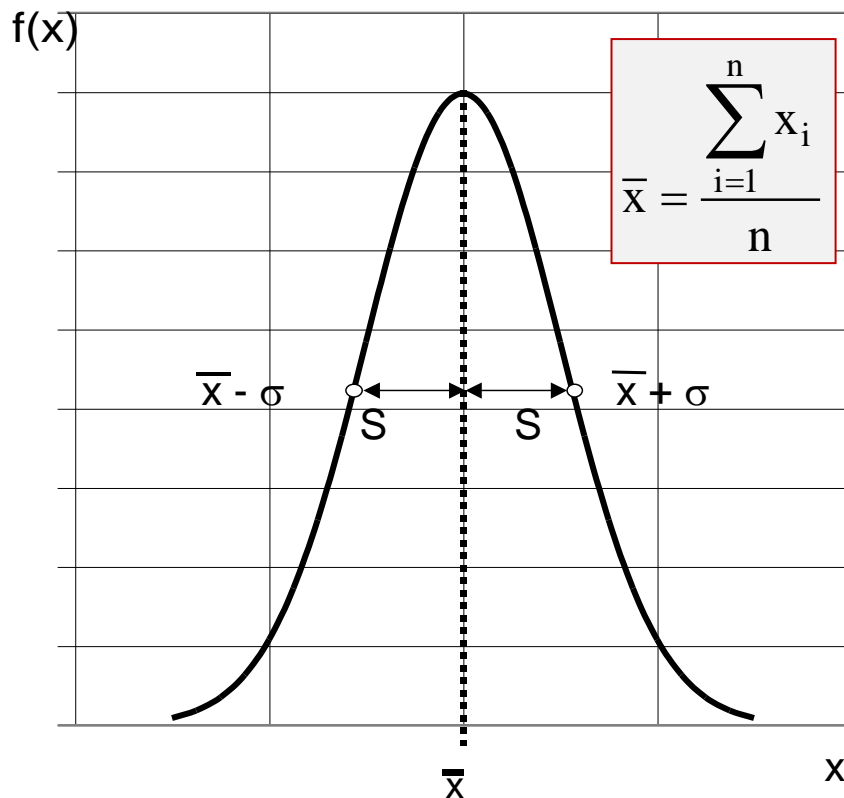
**Rešenje:**

## Statistička obrada

U velikoj većini slučajeva, koji se sreću u praksi, slučajne greške se potčinjavaju **Gausovom zakonu raspodele verovatnoće** (*Zakon normalne raspodele*).

# GREŠKE MERENJA

Ako rezultate serije merenja jedne veličine prikažemo grafički tada će se oni tako rasporediti da će najveći broj rezultata biti oko aritmetičke sredine, dok će ih biti sve manje sa udaljavanjem od aritmetičke sredine u levu ili desnu stranu.



Tamo gde su rezultati merenja gušće raspoređeni postoji veća verovatnoća da će se na tom mestu naći rezultat bilo kog ponovljenog merenja sa istom aparaturom i pod istim uslovima.

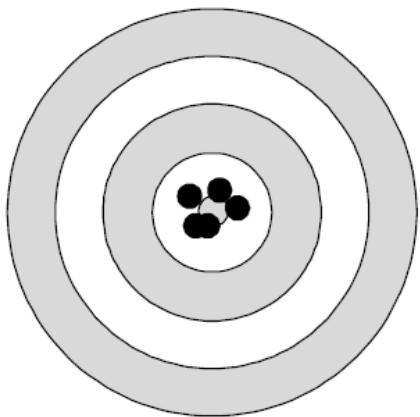
**To je rezultat koji ima najviše uslova da zameni tačnu vrednost**

$\sigma$  je srednja kvadratna greška pojedinačnog merenja

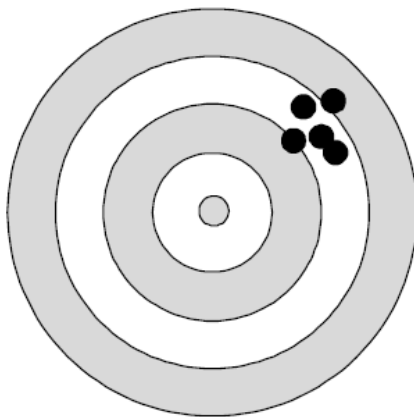
$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

# GREŠKE MERENJA

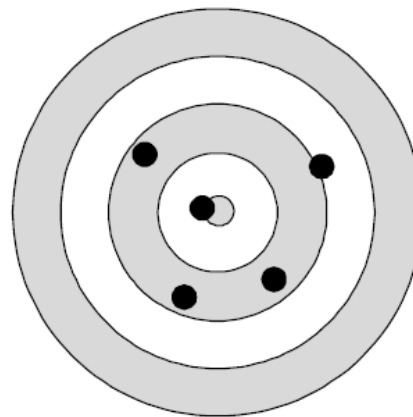
Komentar – slikovito pojašnjenje pojmova o **tačnosti** i **preciznosti** merenja (mernih rezultata).



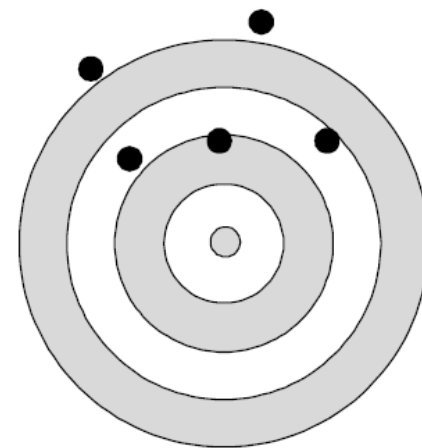
**Tačno i  
precizno**



**Netačno i  
precizno**



**Tačno i  
neprecizno**



**Netačno i  
neprecizno**

# OSNOVNI POJMOVI O METROLOŠKIM KARAKTERISTIKAMA MERNIH UREĐAJA

---

## KLASA TAČNOSTI MERNOG UREĐAJA

**Klasa tačnosti mernog uređaja** je metrološka karakteristika, koja sadrži dozvoljene osnovne i dopunske greške i druga svojstva mernih uređaja, koja utiču na tačnost.

Granice dozvoljenih osnovnih i dopunskih grešaka mernog uređaja za svaku klasu tačnosti daje se u vidu apsolutnih i relativnih grešaka.

### VAŽNO

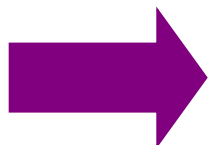
Klasa tačnosti mernog uređaja karakteriše njegovo svojstvo u odnosu na tačnost, ali ne predstavlja pokazatelj tačnosti merenja izvršenog uređajem, jer tačnost zavisi i od metode i uslova merenja.

# OSNOVNI POJMOVI O METROLOŠKIM KARAKTERISTIKAMA MERNIH UREĐAJA

---

## KLASA TAČNOSTI MERNOG UREĐAJA

Pod **osnovnom greškom mernog uređaja** podrazumeva se greška mernog uređaja koji je korišćen u normalnim uslovima



Međutim, normalni uslovi merenja nisu uvek i radni, pa se standardima i tehničkim uslovima definiše šira oblast primene mernih uređaja uz uslov definisanja **dopunske greške**.

Pod **dopunskom greškom** podrazumeva se greška merenja prouzrokovana odstupanjem neke od uticajnih veličina izvan normalnih granica.

# OSNOVNI POJMOVI

## KLASA TAČNOSTI MERNOG UREĐAJA

- Klasa tačnosti mernog instrumenta definiše se kao procentualna granična relativna greška instrumenta:

$$K = \left| \frac{\Delta x_{\max}}{x_g} \right| \cdot 100$$

$\Delta x_{\max}$  – maksimalna apsolutna greška instrumenta  
 $x_g$  - granična (maksimalna) vrednost mernog opsega instrumenta

- Procentualna granična relativna greška najbolje karakteriše merne uređaje u pogledu tačnosti, pa je usvojena kao kriterijum za njihovu klasifikaciju.
- Simboli za klase tačnosti mernog instrumenta su brojevi koji pokazuju maksimalno dozvoljenu procentualnu grešku.
- Našim standardima su propisane sledeće klase tačnosti:  
0,1 / 0,2 / 0,5 / 1 / 1,5 / 2,5 / 5
- Ovim klasama tačnosti odgovaraju granične veličine procentualne greške:  
±0,1% / ±0,2% / ±0,5% / ±1% / ±1,5% / ±2,5% / ±5%

# OSNOVNI POJMOVI O METROLOŠKIM KARAKTERISTIKAMA MERNIH UREĐAJA

---

- ▶ Pod **promenljivim pokazivanjem uređaja** podrazumeva se razlika između pokazivanja pri uzlaznom i silaznom hodu. *Ova razlika se uspostavlja višestrukom proverom pri istim uslovima.*
- ▶ Pod **popravkom** podrazumevamo veličinu iste vrste kao što je i merena, a koja se dodaje izmerenoj veličini radi eliminisanja sistematske greške.
  - *Popravka je ravna apsolutnoj grešci mernog uređaja, ali s obrnutim znakom.*
  - *U nekim slučajevima za eliminaciju sistematske greške koristi se popravni množitelj, a to je broj kojim se množi rezultat merenja.*



# OSNOVNI POJMOVI O METROLOŠKIM KARAKTERISTIKAMA MERNIH UREĐAJA

---

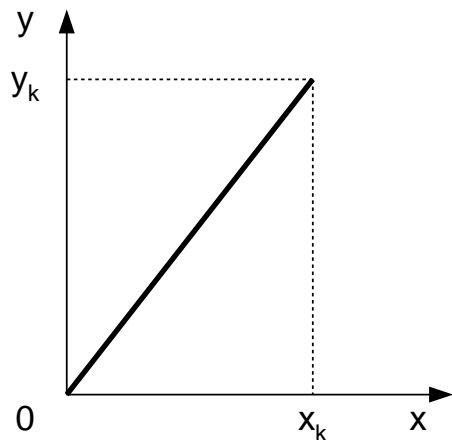
▶ Pri primeni ili pri određivanju metroloških karakteristika mernih uređaja neophodno je voditi računa o stabilnosti njihovog rada. Za dostizanja stacionarnog stanja mernog uređaja potrebno je vreme, nazvano **vremenom uspostavljanja**. Ono se obično daje tehničkim uputstvima.

▶ **Statičkom karakteristikom uređaja** naziva se funkcionalna zavisnost između izlazne veličine  $y$  i ulazne veličine  $x$  u stacionarnom stanju:  **$y = f(x)$**

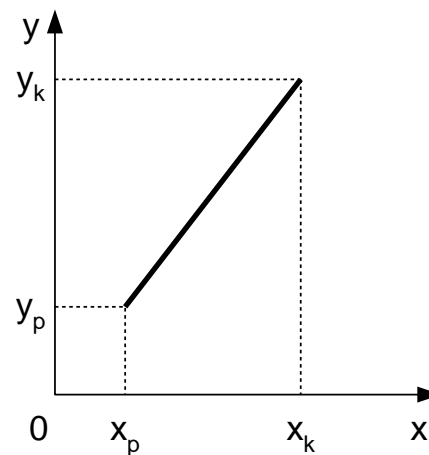
Ova funkcionalna zavisnost naziva se i **jednačinom skale uređaja**. Ona može biti zadata analitički, grafički ili tabelarno.

# OSNOVNI POJMOVI O METROLOŠKIM KARAKTERISTIKAMA MERNIH UREĐAJA

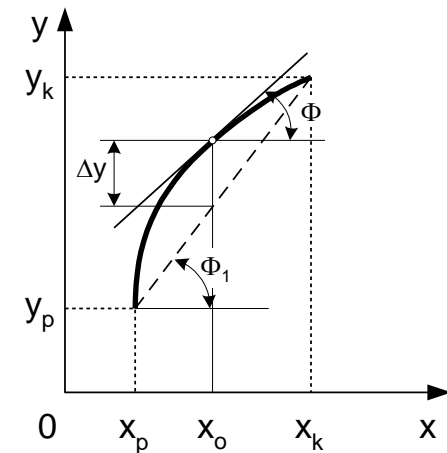
## ► Statička karakteristika mernog uređaja



(a)



(b)



(c)

► U opštem slučaju linearna i linearizovana statička karakteristika mernog uređaja opisuje se jednačinom oblika:

$$y = a + K \cdot x$$

gde su a i K konstante

# OSNOVNI POJMOVI O METROLOŠKIM KARAKTERISTIKAMA MERNIH UREĐAJA

► Važna karakteristika mernih uređaja je i **osetljivost S**.

U opštem slučaju jednačina skale mernog uređaja je u linearnoj vezi sa ulaznom veličinom, tj.:

$$y = y_p + S \cdot (x - x_p)$$

Gde su  $x_p$  i  $y_p$  početne vrednosti odgovarajuće izlazne i ulazne veličine

Osetljivost uređaja određena je jednačinom:

$$S = \frac{y_k - y_p}{x_k - x_p} = \frac{y_d}{x_d}$$

Gde su:

$x_d$  – dijapazon promene ulaznog signala

$y_d$  – dijapazon promene izlaznog signala

Osetljivost mernog uređaja sa nelinearnom statičkom karakteristikom definisana je sa:

$$S = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right| = \frac{dy}{dx}$$

# **DINAMIČKE KARAKTERISTIKE**

## **- Matematički model mernog uređaja -**

# Matematički model mernog uređaja

U izučavanju mernih uređaja, najšire upotrebljavani matematički model baziran je na **linearnim diferencijalnim jednačinama sa konstantnim koeficijentima**.

Pretpostavimo da se zavisnost između bilo kojeg pojedinačnog ulaza i odgovarajućeg izlaza može analitički da prikaže jednačinom oblika:

$$a_n \frac{d^n q_o}{d t^n} + \dots + a_1 \frac{d q_o}{d t} + a_0 q_o = b_m \frac{d^m q_i}{d t^m} + \dots + b_1 \frac{d q_i}{d t} + b_0 q_i$$

gde je:  $q_o$  - izlazna veličina

$q_i$  - ulazna veličina

$t$  - vreme

$a_n, b_m$  - kombinacije fizičkih parametara sistema,

pri čemu se smatra da su konstante

# Matematički model mernog uređaja

Koristeći diferencijalni operator

$$D = \frac{d}{dt}$$

prethodna jednačina može da se napiše u obliku:

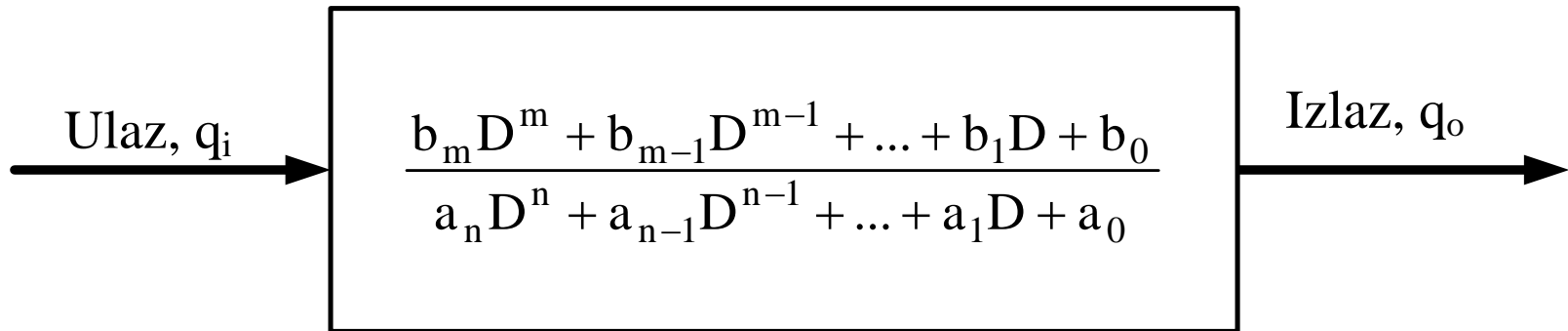
$$(a_n D^n + \dots + a_1 D + a_0) q_o = (b_m D^m + \dots + b_1 D + b_0) q_i$$

Ili u obliku **PRENOSNE FUNKCIJE** (algebarska relacija, iz koje se formira odnos između izlaza  $q_o$  i ulaza  $q_i$ )

$$\text{Prenosna funkcija} = \frac{q_o}{q_i} D = \frac{b_m D^m + \dots + b_1 D + b_0}{a_n D^n + \dots + a_1 D + a_0}$$

# Matematički model mernog uređaja

Jedna od nekoliko prednosti prenosne funkcije jeste mogućnost simboličkog grafičkog opisivanja dinamike sistema pomoću blok dijagrama.



***Prenosna funkcija***

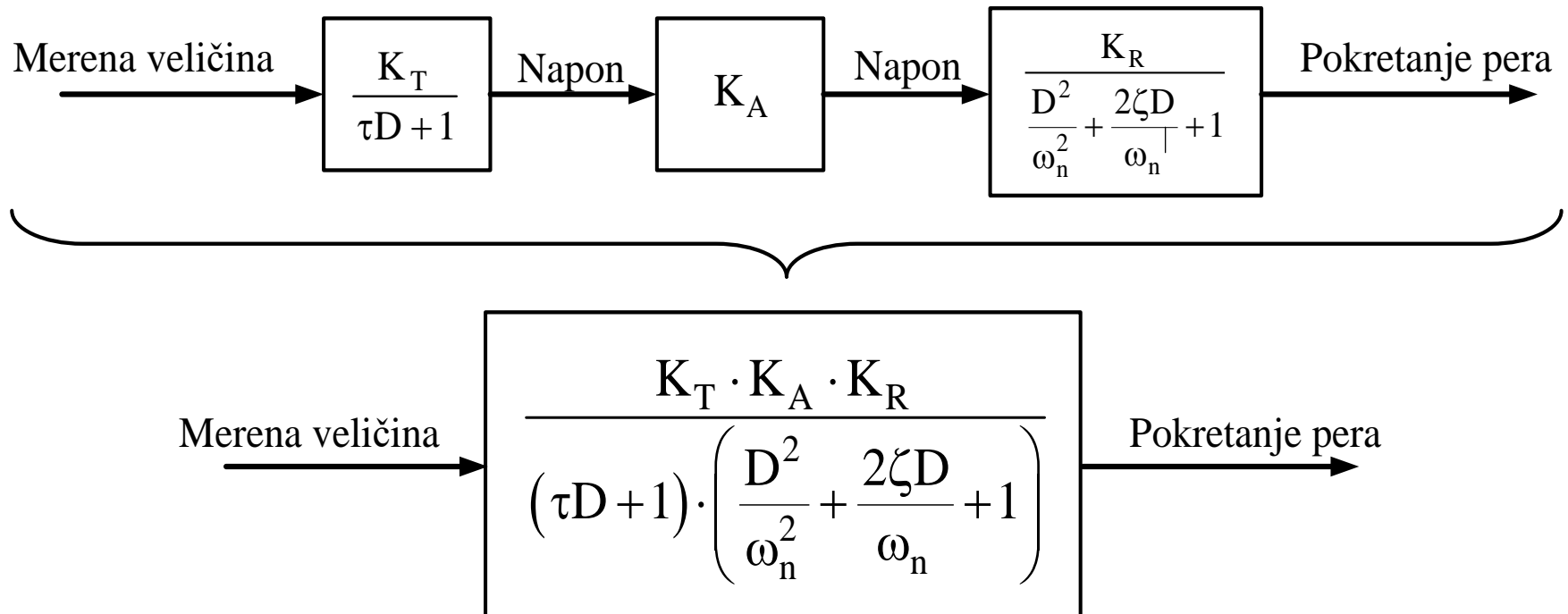
To je naročito korisno pri određivanju celokupne karakteristike sistema sačinjenog iz više delova čije su pojedine prenosne funkcije poznate.

# Matematički model mernog uređaja

Ukupna prenosna funkcija jeste proizvod pojedinih funkcija, jer izlaz iz prethodnog uređaja postaje ulaz u naredni

**Primer:**

*Složena prenosna funkcija*





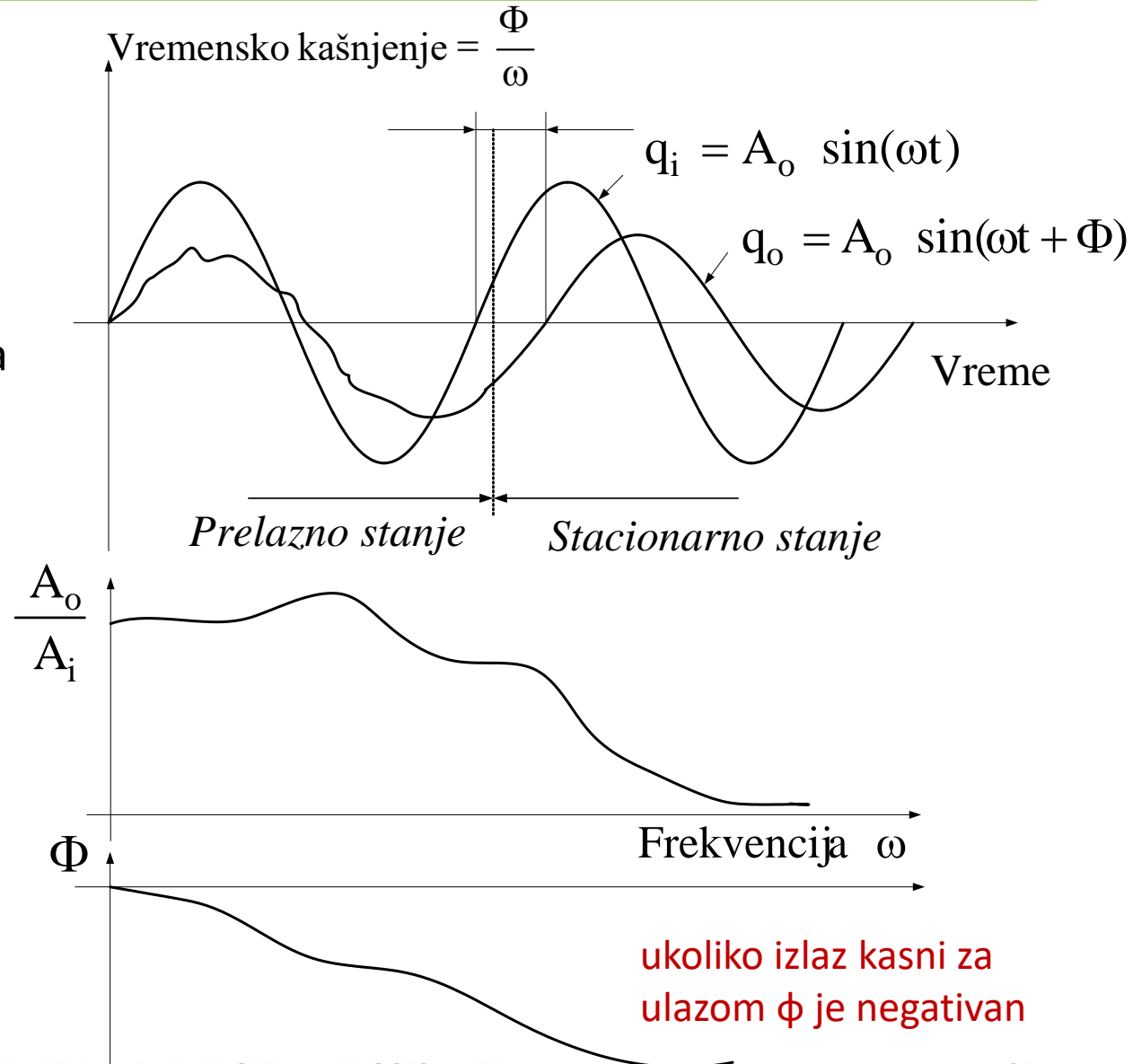
# Matematički model mernog uređaja

Pri dinamičkim uslovima analizira se odziv mernog uređaja na određeni standardni ulaz.

Jedan od takvih odziva je postojano stanje odziva na **sinusni ulaz**, gde je ulaz  $q_i$  oblika  $A \sin(\omega t)$ .

Izlazna velična  $q_o$  dobija oblik sinusnog talasa sa istom frekvencijom  $\omega$ , kao i ulazna veličina  $q_i$ .

Amplitude ulaza i izlaza mogu da se razlikuju, a takođe može da postoji i fazno pomeranje.



# Matematički model mernog uređaja

---

## INSTRUMENTI NULTOG REDA

Najjednostavniji mogući slučaj jednačine

$$(a_n D^n + \dots + a_1 D + a_0) q_o = (b_m D^m + \dots + b_1 D + b_0) q_i$$

je slučaj kada su svi članovi  $a_i$  i  $b_i$  izuzev članova  $a_0$  i  $b_0$  jednaki nuli.

Diferencijalna jednačina tada prelazi u jednostavnu algebarsku jednačinu:

$$a_0 q_o = b_0 q_i$$

Svaki instrument ili sistem koji se pokorava ovoj jednačini, a unutar nekog predodređenog opsega u radnim uslovima, naziva se instrumentom **nultog reda**.

# Matematički model mernog uređaja

---

## INSTRUMENTI NULTOG REDA

U praksi umesto dve konstante definišemo **STATIČKU OSETLJIVOST**

$$q_o = \frac{b_o}{a_o} q_i = K q_i$$

Pošto je jednačina  $q_o = K q_i$  algebarska, to je jasno da, bez obzira na to kako se  $q_i$  menja u vremenu, izlaz instrumenta prati ulaz, bez bilo kakvih iskrivljenja ili vremenskih zakašnjenja.

**!** Tako instrument nultog reda predstavlja idealni instrument sa perfektnim dinamičkim osobinama.

# Matematički model mernog uređaja

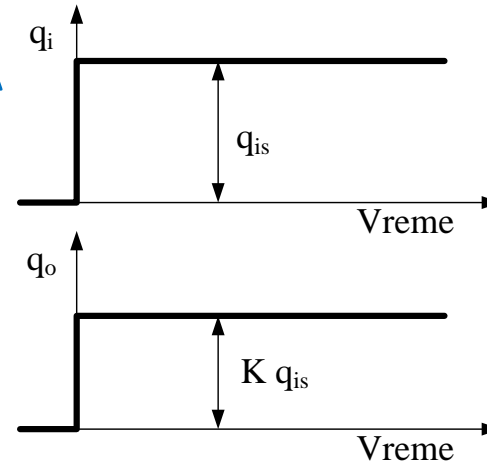
## INSTRUMENTI NULTOG REDA

### Stepeni odziv instrumenta nultog reda / Primer: Potenciometar

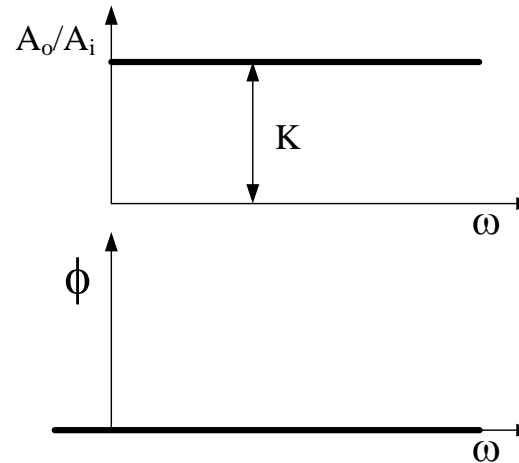
Ukoliko je otpor raspoređen linearno duž dužine  $L$ , možemo pisati:

$$e_o = \frac{E_b}{L} \cdot x_i = K \cdot x_i$$

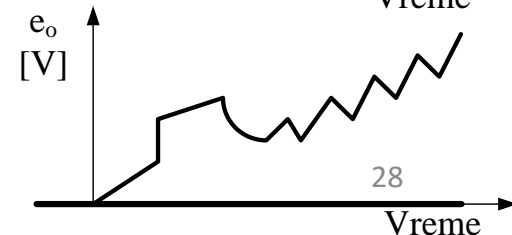
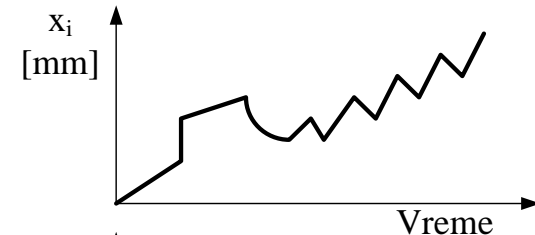
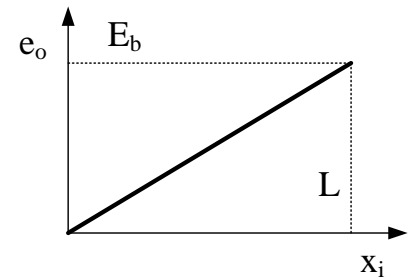
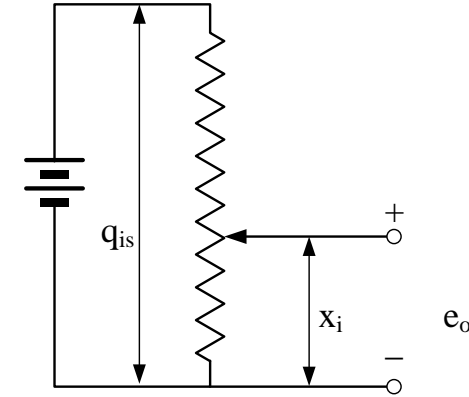
gde je  $K = E_b/L$   
volti po jedinici dužine.



Odskočni odziv



Frekventni odziv



# Matematički model mernog uređaja

## INSTRUMENTI PRVOG REDA

Ukoliko su u jednačini

$$a_n \frac{d^n q_o}{d t^n} + \dots + a_1 \frac{d q_o}{d t} + a_0 q_o = b_m \frac{d^m q_i}{d t^m} + \dots + b_1 \frac{d q_i}{d t} + b_0 q_i$$

svi parametri  $a_i$  i  $b_i$ , izuzev  $a_1$ ,  $a_0$  i  $b_0$ , jednaki nuli, dobija se:

$$a_1 \frac{d q_o}{d t} + a_0 q_o = b_0 q_i$$

Svaki instrument čije se ponašanje opisuje ovakvom jednačinom definiše se kao **instrument prvog reda**.

# Matematički model mernog uređaja

## INSTRUMENTI PRVOG REDA

Sve parametre u jednačini koeficijenta,

$$a_1 \frac{d q_o}{d t} + a_0 q_o = b_0 q_i$$

svodimo na dva

Tako što celu jednačinu podelimo sa  $a_0$ .

Time dobijamo:

$$\frac{a_1}{a_0} \frac{d q_o}{d t} + q_o = \frac{b_0}{a_0} q_i$$

odnosno

$$(\tau D + 1)q_o = Kq_i$$

pri čemu smo definisali **statičku osetljivost** i **vremensku konstantu**

$$K = \frac{b_0}{a_0} \quad \text{i} \quad \tau = \frac{a_1}{a_0}$$

Vremenska konstanta uvek ima dimenziju vremena, dok statička osetljivost  $K$  ima dimenzije izlaz podeljeno s ulazom.

# Matematički model mernog uređaja

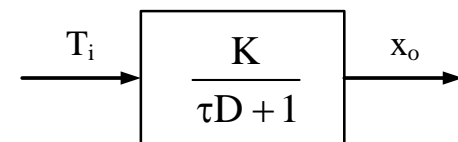
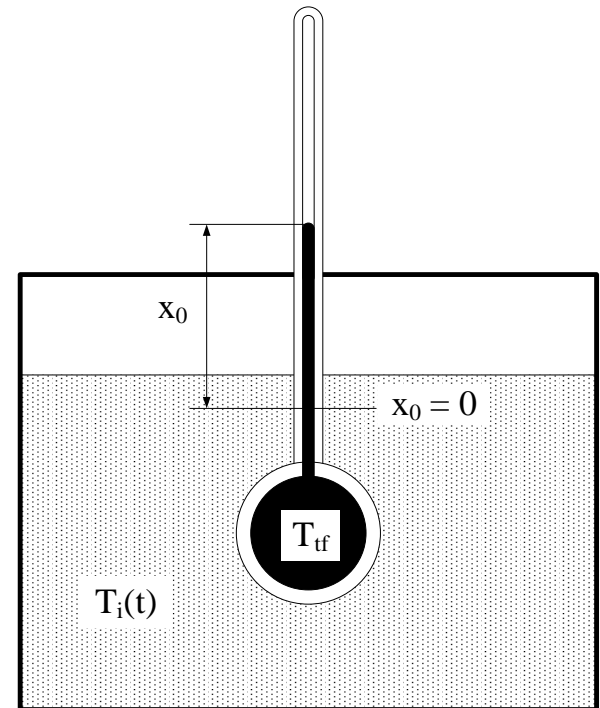
## INSTRUMENTI PRVOG REDA

Iz relacije  $(\tau D + 1)q_o = Kq_i$  možemo formirati **PRENOSNU FUNKCIJU**:

$$\frac{q_o}{q_i}(D) = \frac{K}{\tau D + 1}$$

Kao primer instrumenta prvog reda razmotrićemo **termometar na bazi širenja tečnosti**.

Ulazna merena veličina je temperatura fluida -  **$T_i$**  koji okružuje balon termometra, a izlazna veličina je pomeranje nivoa fluida u kapilarnoj cevi termometra -  **$X_o$** .



# Matematički model mernog uređaja

## INSTRUMENTI PRVOG REDA

veza između temperature  $T_{tf}$  i očitane visine  $x_0$

$$x_0 = \frac{K_{\theta x} \cdot V_b}{A_c} \cdot T_{tf}$$

gde je:

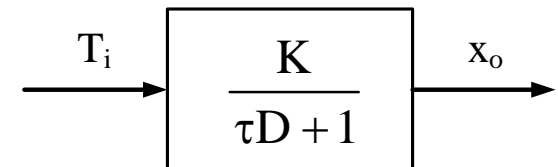
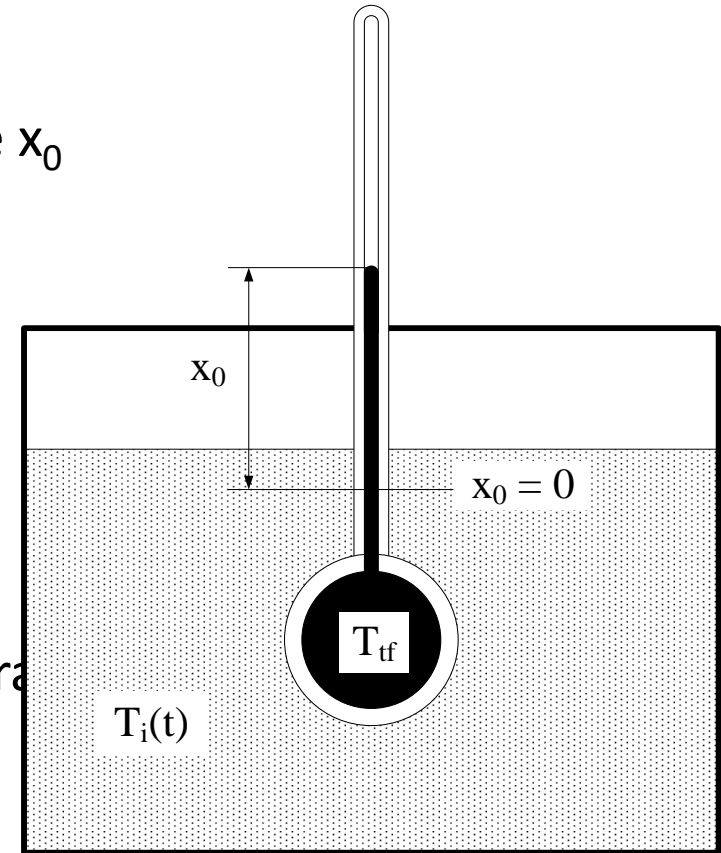
$x_0$  = visina stuba tečnosti, [m],

$T_{tf}$  = temperatura fluida u balonu termometra  
[°C] ( $T = 0$ , kada je  $x_0 = 0$ ),

$K_{\theta x}$  = koeficijent zapreminskog širenja  
termometarskog fluida, [1/°C],

$V_b$  = zapremina balona, [m<sup>3</sup>],

$A_c$  = površina poprečnog pr. kapilare, [m<sup>2</sup>].





# Matematički model mernog uređaja

## INSTRUMENTI PRVOG REDA

Da bi dobili diferencijalnu jednačinu veze ulaza i izlaza za ovaj termometar, treba da se formira energetski bilans posmatranog procesa:

**Toplota koja uđe - toplota koja izađe = akumulisana energija**

$$U \cdot A_b \cdot (T_i - T_{tf}) \cdot dt - 0 = V_b \cdot c_p \cdot \rho \cdot dT_{tf}$$

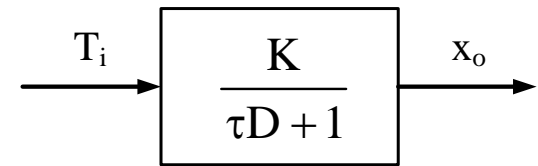
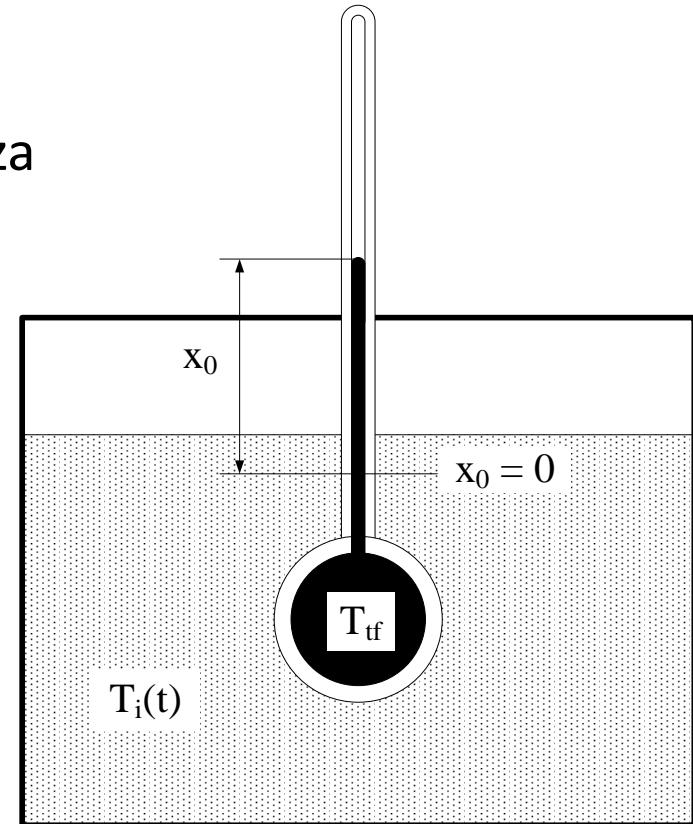
gde je:

$U$  = ukupni koef. prolaza toplote,  $[W/(m^2 \text{ } ^\circ C)]$ ,

$A_b$  = površina prolaza toplote zida balona,  $m^2$ ,

$c_p$  = izobarska specifična toplota

termometarskog fluida,  $[J/(kg \text{ } ^\circ C)]$ .



# Matematički model mernog uređaja

## INSTRUMENTI PRVOG REDA

Prethodna jednačina bilansa može da se napiše:

$$V_b \cdot \rho \cdot C_p \cdot \frac{d T_{tf}}{d t} + U \cdot A_b \cdot T_{tf} = U \cdot A_b \cdot T_i$$

Korišćenjem veze ulaz  $T_i$  – izlaz  $x_o$  dobijamo:

$$\frac{\rho \cdot C_p \cdot A_c}{K_{\theta x}} \cdot \frac{d x_o}{d t} + \frac{U \cdot A_b \cdot A_c}{K_{\theta x} \cdot V_b} x_o = U \cdot A_b \cdot T_i$$

čime se prepoznaje forma jednačine

$$(\tau D + 1)q_o = Kq_i \quad \text{i može da se definiše:}$$

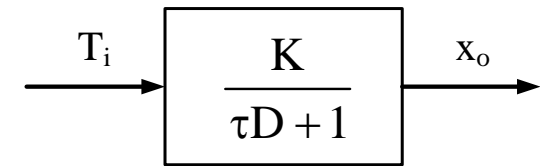
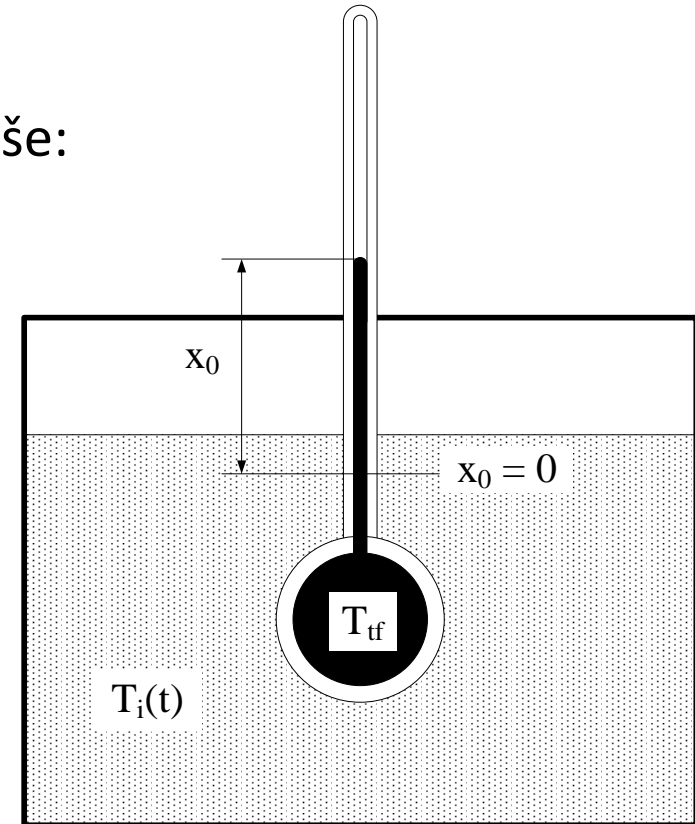
**Statička osetljivost**

$$K = \frac{K_{\theta x} \cdot V_b}{A_c} \quad [m/^\circ C]$$

i

**Vremenska konstanta:**

$$\tau = \frac{\rho \cdot C_p \cdot V_b}{U \cdot A_b} \quad [s]$$



# Matematički model mernog uređaja

## INSTRUMENTI PRVOG REDA

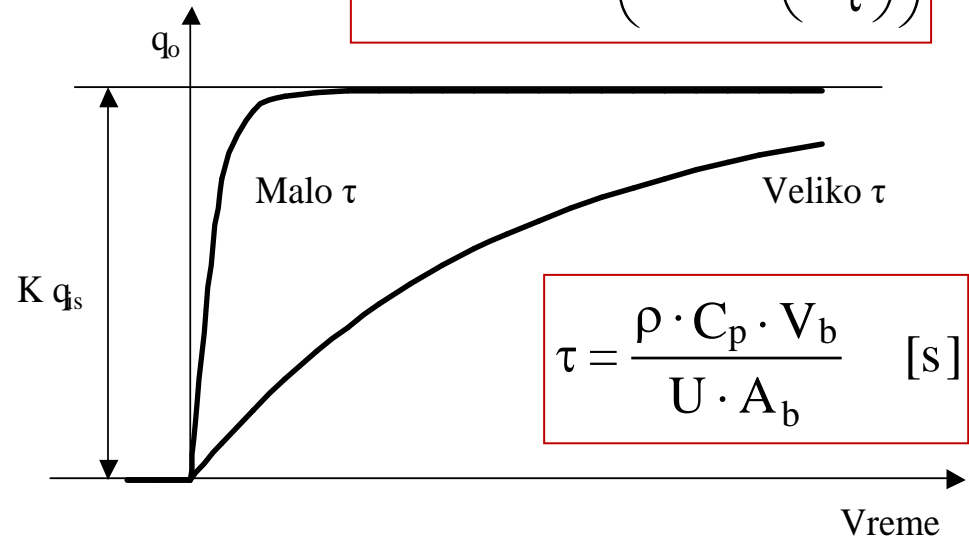
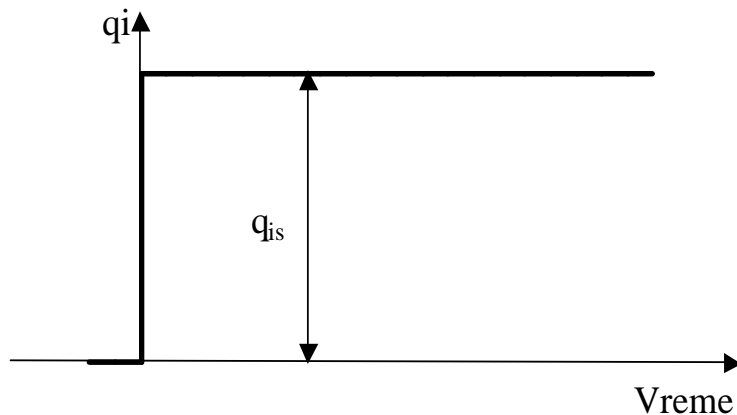
Dobijenom diferencijalnom jednačinom, koja povezuje ulaz i izlaz nekog instrumenta, moгу da se proučavaju njegove dinamičke karakteristike.

Rešenje diferencijalne jednačine je izlaz kao funkcija vremena.

Ukoliko je ulaz blisko proporcionalan izlazu, dinamička preciznost je dobra.

### Stepeni odziv instrumenta prvog reda

$$q_o = K \cdot q_{is} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right)$$



$$\tau = \frac{\rho \cdot C_p \cdot V_b}{U \cdot A_b} \quad [s]$$

# Matematički model mernog uređaja

## INSTRUMENTI PRVOG REDA

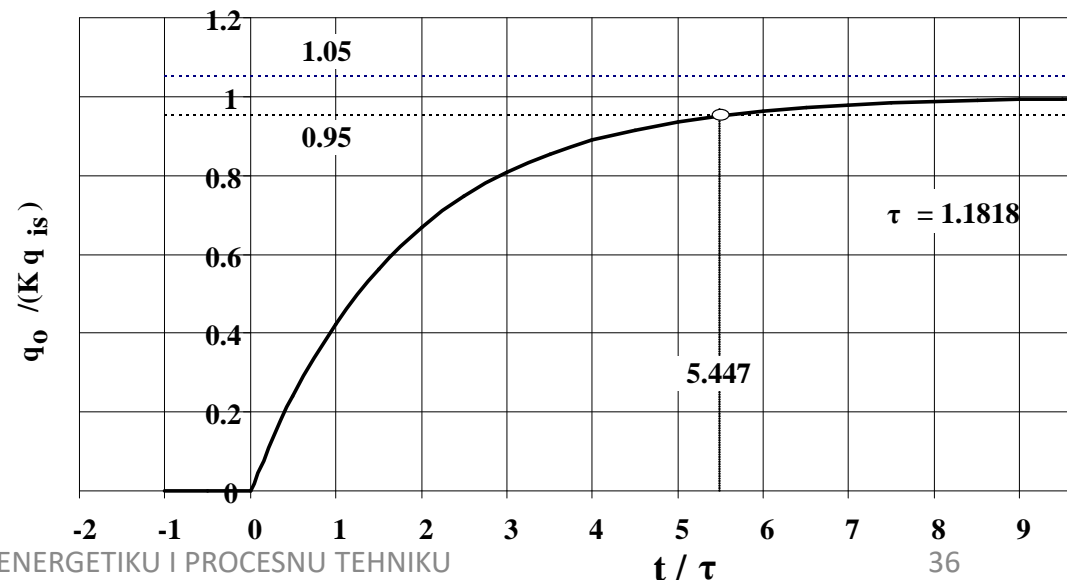
Značajna dinamička karakteristika korisna u ocenjivanju brzine odziva nekog instrumenta je **VREME USPOSTAVLJANJA**.

To je vreme (nakon uključivanja stepenog ulaza) za koje instrument postiže i održava izlaznu vrednost unutar određene plus i minus tolerancije oko njene konačne vrednosti.

→ **Kratko vreme uspostavljanja znači brz odziv.**

Razumljivo je da brojna vrednost vremena uspostavljanja zavisi od usvojene procentualne vrednosti tolerancije.

Tako može da se govori o, recimo, petoprocentnom vremenu uspostavljanja



# Matematički model mernog uređaja

## INSTRUMENTI PRVOG REDA

Znajući da brz odziv zahteva **malu vrednost**  $\tau$ , može da se ispita bilo koji specifični instrument prvog reda da se ustanovi koje fizičke promene obezbeđuju smanjenje  $\tau$ .

Ukoliko se razmatra dinamičko ponašanje termometra iz prethodnog primera, tada se smanjenje  $\tau$  postiže sledećim merama:

1. smanjenjem  $\rho$ ,  $c_p$ ,  $V_b$
2. povećanjem  $U$ ,  $A_b$

$$\tau = \frac{\rho \cdot C_p \cdot V_b}{U \cdot A_b} \quad [s]$$

Pošto su  $\rho$  i  $c_p$  osobine fluida koji ispunjava termometar one ne mogu da se menjaju nezavisno jedna od druge, i za malo  $\tau$  traži se fluid sa malim proizvodom  $\rho \times c_p$ .

Zapremina balona  $V_b$  može biti smanjena, ali se tako smanjuje i  $A_b$ .

# Matematički model mernog uređaja

---

## INSTRUMENTI PRVOG REDA

**VAŽNO:** Činjenica da  $\tau$  zavisi od  $U$  znači da se ne može tvrditi da određeni termometar ima određenu vremensku konstantu, nego samo da pojedini termometar upotrebljen u određenom fluidu pod određenim toplotno-prenosnim uslovima ima određenu vremensku konstantu.

Na primer, isti termometar u uznemirenoj struji nafte ima vremensku konstantu od 5 s, a u mirnom vazduhu 100 s.

→ Zbog toga moramo uvek biti sigurni da uslovi korišćenja instrumenta odgovaraju onima u kojima je obavljena kalibracija ili da su primenjene odgovarajuće korekcije.

# Matematički model mernog uređaja

## INSTRUMENTI DRUGOG REDA

Instrumenti drugog reda su oni čije se ponašanje sistema opisuje jednačinom:

$$a_2 \frac{d^2 q_o}{d t^2} + a_1 \frac{d q_o}{d t} + a_0 q_o = b_0 q_i$$

Osnovni parametri u prethodnoj jednačini mogu da se razvrstaju u tri tipa parametara:

1. statička osetljivost

$$K = \frac{b_0}{a_0}$$

2. neprigušena prirodna frekvencija [rad/vreme]

$$\omega_n = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$$

3. koeficijent prigušenja

$$\zeta = \frac{a_1}{2 \sqrt{a_0 a_2}}$$

# Matematički model mernog uređaja

---

## INSTRUMENTI DRUGOG REDA

Nakon sređivanja opšte jednačine dobija se jednačina koja opisuje ponašanje instrumeta:

$$\left( \frac{D^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi D}{\omega_n} + 1 \right) q_o = K q_i$$

Operatorska prenosna funkcija je:

$$\frac{q_o}{q_i}(D) = \frac{K}{\frac{D^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi D}{\omega_n} + 1}$$



# Matematički model mernog uređaja

## INSTRUMENTI DRUGOG REDA

Primer instrumenta drugog reda je **merač sile s oprugom**.

Veza Sile  $f_i$  (ulaz) i pomeranja  $x_0$  (izlaz):

$$\sum \text{Sila} = \text{Masa} \times \text{Ubrzanje}$$

$$f_i - B \frac{d x_0}{d t} - K_s x_0 = M \frac{d^2 x_0}{d t^2}$$

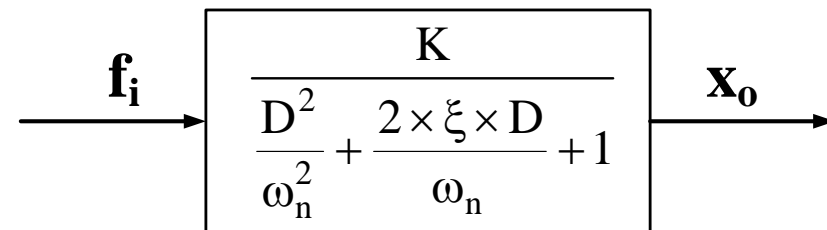
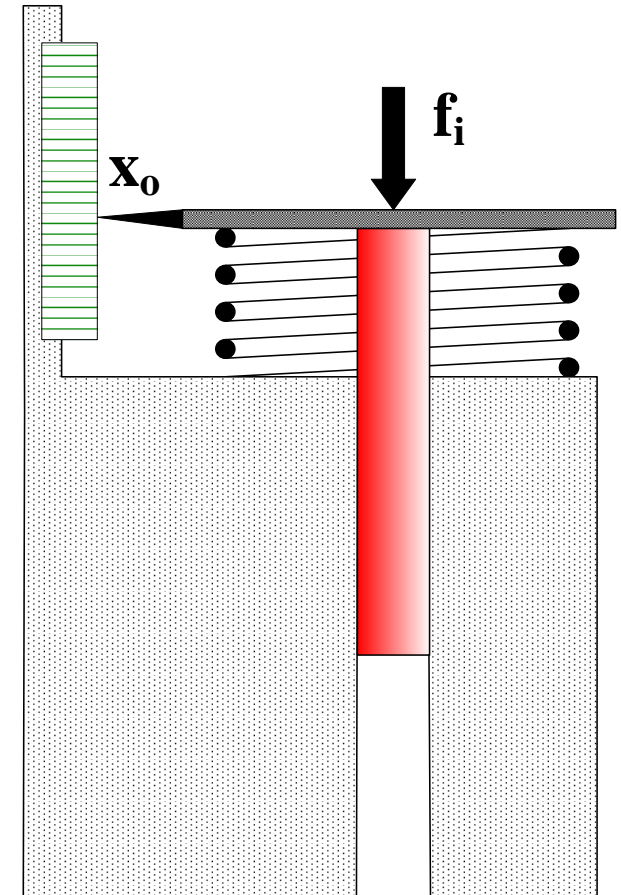
Gde su:

$B$  – prigušni efekat cilindra, (N/(m×s))

$K_s$  – konstanta opruge, (N/m)

$M$  – ukupna masa podsklopa

$$\rightarrow (M \cdot D^2 + B \cdot D + K_s) x_0 = f_i$$



# Matematički model mernog uređaja

## INSTRUMENTI DRUGOG REDA

Na osnovu prethodnih relacija, i oblika osnovne jednačine

$$\left( \frac{D^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi D}{\omega_n} + 1 \right) q_o = K q_i$$

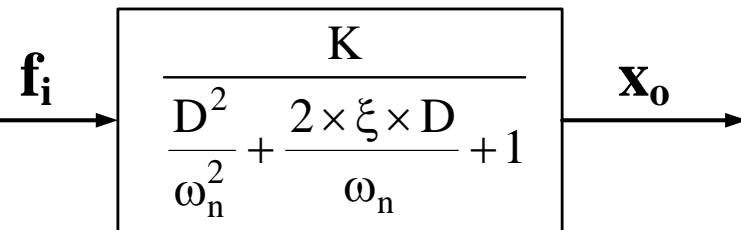
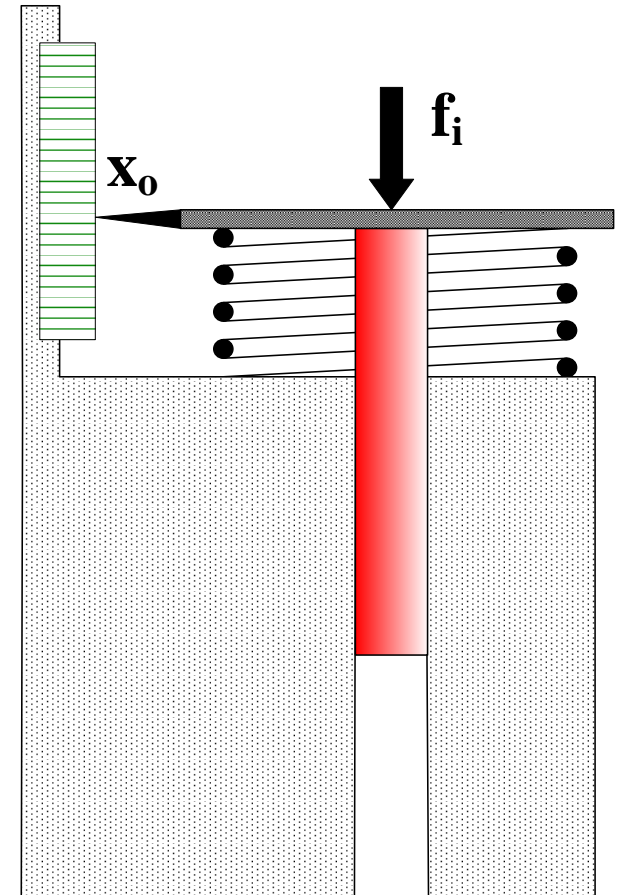
parametri instrumenta drugog reda su:

1. statička osetljivost  $K = \frac{1}{K_s}$  [m/N]

2. neprigušena prirodna frekvencija [rad/vreme]

$$\omega_n = \frac{K_s}{M} \quad [\text{rad/s}]$$

3. koeficijent prigušenja  $\xi = \frac{B}{2 K_s M}$  [-]



# Matematički model mernog uređaja

## INSTRUMENTI DRUGOG REDA

### Stepeni odziv instrumenta drugog reda

*Prekomerno prigušenje ( $\xi > 1$ ):*

$$\frac{q_o}{K q_{is}} = -\frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \exp[(-\xi - \xi^2 - 1) \omega_n t] + \frac{\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \exp[(-\xi - \xi^2 - 1) \omega_n t] + 1$$

*Kritično prigušenje ( $\xi = 1$ ):*

$$\frac{q_o}{K q_{is}} = -(1 + \omega_n t) \exp(-\omega_n t) + 1$$

*Bez prigušenja ( $0 \leq \xi < 1$ ):*

$$\frac{q_o}{K q_{is}} = -\frac{\exp(-\xi \omega_n t)}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\sqrt{1 - \xi^2} \omega_n t + \phi) + 1$$

$$\phi = \frac{1}{\sin \sqrt{1 - \xi^2}}$$

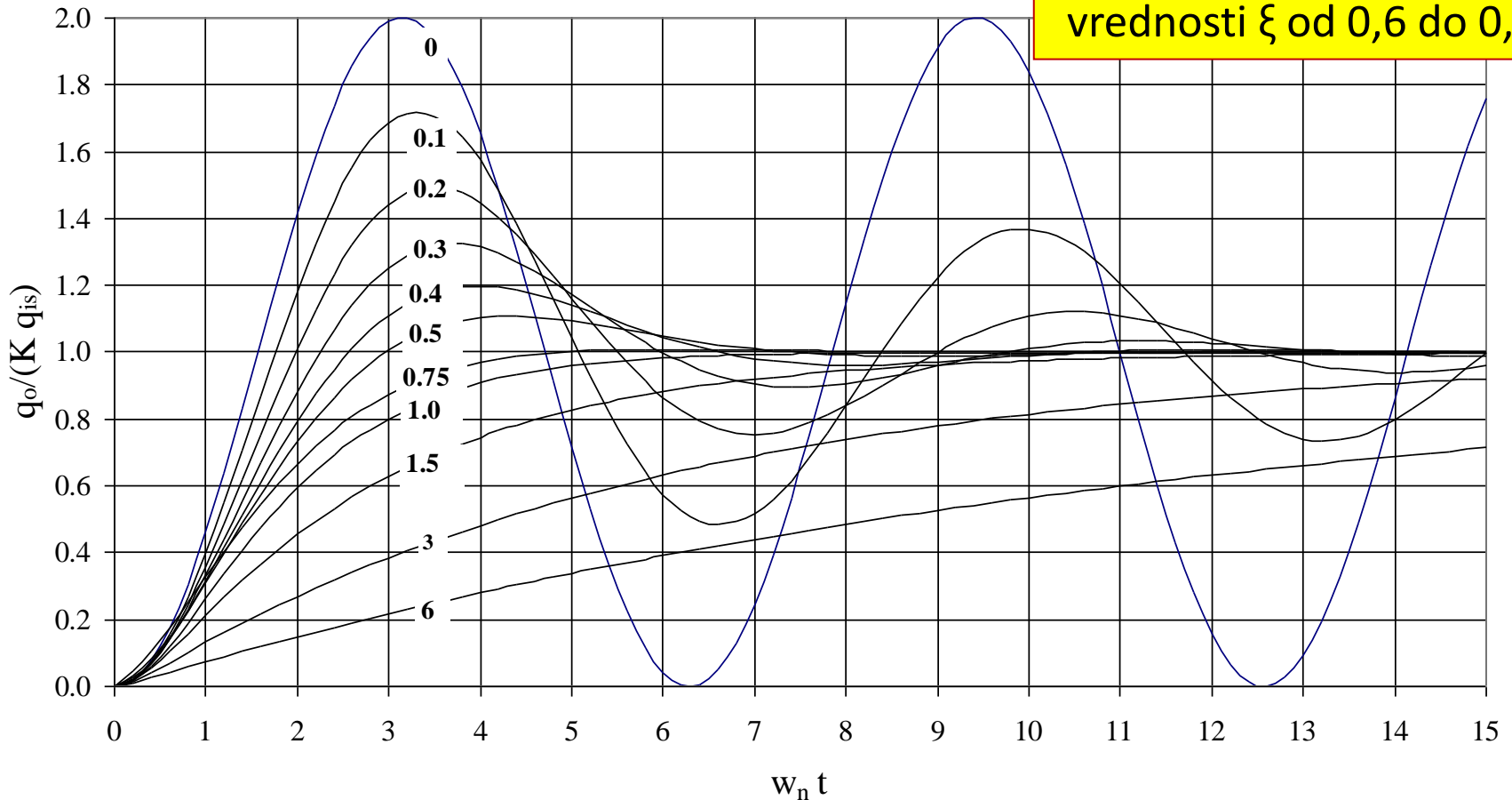
# Matematički model mernog uređaja

## INSTRUMENTI DRUGOG REDA

### Stepeni odziv instrumenta drugog reda

Mnogi komercijalni instrumenti imaju vrednosti  $\xi$  od 0,6 do 0,7

Rešenje diferencijalne jednačine



Bezdimenzionalni stepeni odziv instrumenta drugog reda